www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

Programme P et P'

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Calculatrices autorisées (circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986)
B.O. n°34 du 2 octobre 1986

Le sujet comprend deux problèmes indépendants.

Premier Problème

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

I - On considère les droites $(D_\theta)_{\theta \in \mathbb{R}}$ d'équation : $x\cos\theta + y\sin\theta - \cos(3\theta) = 0$.

Donner une représentation paramétrique de l'enveloppe des (D_θ).

II - Soit (E) la courbe définie par:

$$\begin{cases} x = 2\cos\varphi - \cos(2\varphi) \\ y = 2\sin\varphi + \sin(2\varphi) \end{cases} ; \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

a - Quelle relation a-t-on entre (E) et la courbe précédente ?

b - Etudier les points singuliers de (E). Construire (E).

III - a - Donner une équation cartésienne de la tangente à (E) au point de paramètre φ.

b - Quel est l'ensemble (Γ) des points K, projections orthogonales de l'origine O sur les tangentes à (E) ?

Construire (Γ).

c - Déterminer l'aire du domaine limité par (Γ).

Deuxième Problème

I - On considère l'application f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, périodique de période 2π, telle que, pour tout x de $[-\pi,\pi]$, $f(x) = x^2$.

1 - Déterminer la série de Fourier de f; étudier sa convergence simple et uniforme; préciser sa somme.

2 - En déduire la convergence et la somme des séries de termes généraux:

$$\frac{1}{n^2} \quad , \quad \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \quad , \quad \frac{1}{n^4} \qquad (n \geq 1).$$

3 - On pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $R_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2}$

En exprimant R_n à l'aide de S_{2n} et S_n, démontrer que la série : $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{(2k-1)^2}$ converge et calculer sa somme.

Tournez la page S.V.P.

Exprimer de même $T_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ à l'aide de S_{2n+1} et S_n et retrouver ainsi la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$.

II - Soit la fonction g telle que :

$$g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} .$$

1 - Démontrer que g est prolongeable par continuité sur]-1,+∞[. Soit h ce prolongement. Démontrer que h admet un développement en série entière sur un intervalle que l'on précisera. La fonction h est-elle de classe C^∞ sur]-1,+∞[?

2 - Démontrer que :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} .$$

En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$.

III - **1** - Démontrer que les intégrales généralisées suivantes sont convergentes :

$$J = \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx \quad ; \quad K = \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx \quad ; \quad L = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x} dx .$$

2 - Démontrer que K + L = 2J .

3 - Démontrer que K + 4L = 4J (on pourra, dans K, effectuer le changement de variable défini par $x = t^2$).

4 - Exprimer L en fonction de :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$$

(on pourra effectuer une intégration par parties) .

En déduire les valeurs de J, K et L.

IV - Pour chacune des intégrales suivantes, dire si elle converge et, dans ce cas, calculer sa valeur :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1-x^2} dx \quad ; \quad \int_0^1 \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\frac{dx}{x} \quad ; \quad \int_1^{+\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\frac{dx}{x} .$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail